

## РЯД ЛАПЛАСА ТЕЛ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И УРОВЕННОГО ЭЛЛИПСОИДА

К. В. Холшевников<sup>1,2</sup>, Д. В. Миланов<sup>1</sup>, В. Ш. Шайдулин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет,*

<sup>2</sup>*Институт прикладной астрономии РАН*

Теория фигур равновесия активно развивалась в XIX столетии, когда выяснились причины, по которым наблюдаемые массивные небесные тела (Солнце, планеты, спутники) обладают близкой к эллипсоидальной формой. Было установлено, что существуют и в точности эллипсоидальные фигуры. Гравитационный потенциал таких фигур представляется рядом Лапласа. Его коэффициенты (гармонические коэффициенты, или постоянные Стокса  $I_n$ ) определяются одним из двух способов. Во-первых, с помощью некоторого интегрального оператора, если известно распределение плотности внутри тела. Во-вторых, с помощью преобразования внешнего гравитационного потенциала, если известен последний. В представленной работе первым способом найдена асимптотика  $I_n$  для эллипсоида, эквиденситы (поверхности равной плотности) которого являются эллипсоидами вращения с возрастающим от центра к периферии сжатием. Оказалось, что асимптотика зависит только от средней плотности, плотности на поверхности внешнего эллипсоида и его сжатия. Вторым способом найдены  $I_n$  и их асимптотика для уровня эллипсоида. Эти асимптотики совпадают только для эллипсоидов Маклорена. Следовательно, если уровень эллипсоид не является маклореновским, его эквиденситы не могут быть эллипсоидами.

## LAPLACE SERIES FOR ELLIPSOIDAL STRUCTURE'S BODIES AND LEVEL ELLIPSOID

K. V. Kholshchevnikov<sup>1,2</sup>, D. V. Milanov<sup>1</sup>, V. Sh. Shaidulin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Saint Petersburg State University,*

<sup>2</sup>*Institute of Applied Astronomy RAS*

---

© Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш., 2018

Theory of the figures of equilibrium was developed actively during XIX century when causes were discovered making the form of observable massive celestial bodies (the Sun, planets, moons) almost ellipsoidal. The existence of exactly ellipsoidal figures was established. The gravitational potential of such figures can be presented by the Laplace series. Its coefficients (harmonic coefficients, or Stokes constants  $I_n$ ) are determined via one of two ways, first, by a definite integral operator if density distribution inside the body is known, second, by a certain transformation of the outer gravitational potential if it is known. In the present paper asymptotics of  $I_n$  is found using the first approach for an ellipsoid if its equidensities (surfaces of equal density) are ellipsoids of revolution. It is supposed that equidensities' oblateness increases from the centre to the periphery. It turned up that asymptotics depend on the mean density, density on the surface of the boundary ellipsoid, and its oblateness only. Coefficients  $I_n$  and their asymptotics are found using the second approach for a level ellipsoid. Both asymptotics coincide for Maclaurin ellipsoids only. Hence, if the level ellipsoid is not a Maclaurin one then its equidensities cannot be ellipsoids.

## Введение

Представление гравитационного потенциала эллипсоидов со времен Ньютона являлось важной областью математического естествознания. Сотни работ посвящены этой теме. Результаты собраны в многочисленных монографиях, см., например, [1–8]. В частности, еще Лежандр [9] сумел вычислить коэффициенты Стокса ряда Лапласа однородного эллипсоида вращения, и этот результат приводится в учебниках и монографиях. В работах [10, 11] он обобщен на случай эллипсоида вращения, эквиденситами (поверхностями равной плотности) которого служат произвольные эллипсоиды, подчиненные лишь ограничению возрастания их сжатия от центра к периферии. В остальном распределение масс подчинено лишь условию убывания плотности от центра к периферии. Наложенные условия естественны. А. М. Ляпуновым доказано, что равномерно и медленно вращающиеся фигуры, находящиеся в равновесии под действием гравитации, гидростатического давления и центробежных сил, являются фигурами вращения [12]. Как показал Клеро [1, гл. 4], [8, гл. 1], для таких фигур выполняется условие возрастания сжатия. Здесь мы исследуем свойства коэффициентов Стокса ряда Лапласа уровен-

ного эллипсоида вращения, для которого распределение масс неизвестно. Оказывается, что за исключением эллипсоидов Маклорена эквиденситы уровневого эллипсоида не могут быть эллипсоидами.

## Коэффициенты Стокса эллипсоидальных фигур

В этом параграфе мы кратко опишем результаты работы [11].

Введем криволинейные координаты  $u, \theta, \lambda$ , удобные для исследования эллипсоидальных фигур вращения:

$$\begin{aligned}x &= au \sin \theta \cos \lambda, \\y &= au \sin \theta \sin \lambda, \\z &= a\varphi(u) \cos \theta.\end{aligned}\tag{1}$$

Сплошной эллипсоид  $T \in \mathbb{R}^3$  представляет собой образ множества  $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0; 2\pi]$  при отображении (1) и расслаивается на семейство эллипсоидов вращения  $\{S(u)\}$

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2} + \frac{z^2}{\varphi^2(u)} = a^2.\tag{2}$$

Считаем функцию  $\varphi$  гладкой на промежутке  $0 \leq u \leq 1$  и, кроме того, наложим еще четыре условия:

- поверхности семейства  $\{S(u)\}$  не пересекаются и вложены друг в друга;
- семейство  $\{S(u)\}$  стягивается к точке  $S(0)$ , общему центру эллипсоидов  $S(u)$ ;
- эллипсоиды  $S(u)$  сжаты, причем сжатие  $(u - \varphi)/u$ , а тем самым и квадрат первого  $\varphi_1(u) = (u^2 - \varphi^2)/u^2$ , и квадрат второго эксцентриситета  $\varphi_2(u) = (u^2 - \varphi^2)/\varphi^2$  меридионального сечения эллипсоида возрастают (хотя бы нестрого) вместе с  $u$ ;
- наружный эллипсоид  $\mathcal{S} = S(1)$  не является сферой, так что с учетом первого условия его сжатие  $\alpha$  и эксцентриситет  $\varepsilon$  заключены строго между нулем и единицей. Связь между сжатием и эксцентриситетом однозначна:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sqrt{2\alpha - \alpha^2}, \quad \alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \varepsilon^{2n} = \\&= \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \frac{1}{16} \varepsilon^6 + \dots,\end{aligned}\tag{3}$$

где коэффициенты ряда положительны и он сходится абсолютно и равномерно при  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Эти условия выполнены в случае твердотельно вращающихся самогравитирующих фигур равновесия, как отмечено во введении. Из них легко вывести нужные нам свойства функции  $\varphi$  [11].

Пусть  $T$  — эллипсоидальная фигура, эквиденситы которой — эллипсоиды  $S(u)$ , так что плотность  $\varrho$  тела зависит только от  $u$ . Считаем  $\varrho(u)$  интегрируемой, убывающей (хотя бы нестрого) и ограниченной. Обозначим через  $(\mathcal{G}M/a)V$  гравитационный потенциал тела  $T$ . Здесь  $\mathcal{G}$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса  $T$ . По осевой симметрии ряд Лапласа для  $V$  содержит лишь зональные гармоники [7]. Именно, в произвольной точке  $Q(x, y, z)$  вне объемлющей  $T$  сферы

$$V(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n \left( \frac{z}{r} \right). \quad (4)$$

В частности, на положительной части оси  $z$  в точке  $Q_0(0, 0, r)$

$$V(Q_0) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1}. \quad (5)$$

Коэффициенты Стокса (гармонические коэффициенты)  $I_n$  определяются интегралами по телу  $T$ :

$$I_n = \frac{1}{Ma^n} \iiint_T r^n P_n \left( \frac{z}{r} \right) \varrho d\tau, \quad M = \iiint_T \varrho d\tau, \quad (6)$$

где  $d\tau$  — элемент объема;  $P_s$  — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой  $P_s(1) = 1$ . Обратим внимание, что  $a$  является радиусом объемлющей сферы.

По симметрии север–юг гармоники нечетного порядка обращаются в нуль [7].

В [11] тройной интеграл (6) для четных  $n$  сведен к определенному интегралу по  $u$ :

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n, \quad J_n = \frac{1}{\bar{\varrho}} \int_0^1 \varrho(u) \Phi_n(u) du. \quad (7)$$

Здесь и ниже  $\bar{\varrho}$  — средняя плотность (отношение массы к объему),  $\varrho^*$  — наибольшая плотность,  $\varepsilon$  — эксцентриситет меридионального сечения наружного эллипсоида  $\mathcal{S}$ ,  $\Phi$  — некоторая положительная функция от  $u$ .

Справедлива оценка

$$0 < J_n < \frac{B\varepsilon^n}{n(n+1)}, \quad B = \frac{3\rho^*}{\bar{\rho}} \quad (8)$$

и асимптотика

$$J_n \sim \frac{B_1\varepsilon^n}{n^\sigma}, \quad \sigma = 2, \quad B_1 = \frac{3\rho(1)}{\bar{\rho}}. \quad (9)$$

Последняя справедлива при условии непрерывности  $\rho$  в точке  $u = 1$  и  $\rho(1) > 0$ . Если  $\rho(1) = 0$ , то в (9)  $\sigma > 2$  и гармонические коэффициенты  $J_n$  убывают быстрее. Напротив, бесконечная в центре (но интегрируемая) плотность не нарушает асимптотики (9).

Из (9) вытекает, что ряд (4) сходится абсолютно и равномерно вне и на поверхности сферы  $\mathcal{S}_0$  и расходится внутри нее. Сфера сходимости  $\mathcal{S}_0$  задается уравнением

$$r = a\varepsilon. \quad (10)$$

Напомним, что ряд Лапласа сходится именно к потенциалу (т. е. в (4) имеет место равенство) в пересечении указанной области и внешнего к эллипсоиду пространства. Таким образом, при малых  $\varepsilon$  ряд (4) представляет потенциал во всем внешнем пространстве, а при больших ряд расходится в части внешнего пространства в окрестности полюсов. Критическое значение эксцентриситета определяется равенством линейного эксцентриситета меридионального эллипсоида  $a\varepsilon$  и полярной полуоси  $c = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ , откуда  $c/a = \varepsilon = 1/\sqrt{2}$ . Граничный эллипсоид изображен на рисунке.

## Коэффициенты Стокса уровневого эллипсоида вращения

В предыдущем параграфе наши построения базировались на распределении плотности в теле сплошного эллипсоида  $T$ . В гравиметрии существует и другой подход, где внутреннее строение  $T$  игнорируется, а взамен предполагается, что его поверхность  $\mathcal{S}$  является уровнем для потенциала силы тяжести (суммы гравитационных и центробежных сил) при равномерном вращении  $T$  вокруг полярной оси. В этом случае внешний гравитационный и центробежный потенциал выражаются через три параметра —  $a$ ,  $\varepsilon$  и предложенный

Клеро безразмерный параметр  $q$  [12]:

$$q = \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\bar{\rho}} = \frac{\omega^2 a^3 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\mathcal{G}M}, \quad (11)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения. В теории медленно вращающихся фигур равновесия безразмерные величины  $\varepsilon^2$  и  $q$  считаются малыми одного порядка.

Конкретизируем криволинейные координаты (1), полагая  $u = \varepsilon \operatorname{ch} \xi$ ,  $\varphi(u) = \varepsilon \operatorname{sh} \xi$ :

$$\begin{aligned} x &= a\varepsilon \operatorname{ch} \xi \sin \theta \cos \lambda, \\ y &= a\varepsilon \operatorname{ch} \xi \sin \theta \sin \lambda, \\ z &= a\varepsilon \operatorname{sh} \xi \cos \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Каноническое уравнение (2) граничного эллипсоида  $\mathcal{S}$  переходит в

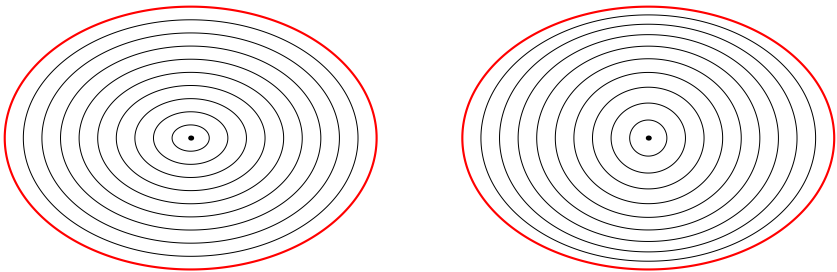
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1, \quad (13)$$

что в криволинейных координатах (12) записывается в виде

$$\xi = \chi. \quad (14)$$

Здесь  $\chi$  однозначно определяется соотношениями

$$\operatorname{ch} \chi = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{sh} \chi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad \operatorname{th} \chi = \sqrt{1-\varepsilon^2}. \quad (15)$$



Сечение меридиональной плоскостью эллипсоида  $T$  и семейства стягивающихся к точке эквиденсит;  $c/a = \sqrt{2}/2 = 0.7071$ ; слева  $\varphi(u) = 0.7071u$  (эллипсоиды  $S(u)$  подобны), справа  $\varphi(u) = u - 0.2929u^2$  (сжатие эллипсоидов  $S(u)$  возрастает от центра к краю)

Обозначим через  $(\mathcal{G}M/a)V$  гравитационный, а через  $(\mathcal{G}M/a)W$  — центробежный потенциал. Постоянство суммы  $V+W$  на  $\mathcal{S}$  однозначно определяет оба потенциала при  $\xi \geq \chi$ , т. е. во внешнем пространстве и на поверхности  $\mathcal{S}$ . В координатах (12) они имеют простой вид [13]:

$$\begin{aligned} V &= A_1 G_1(\text{sh } \xi) + A_2 G_2(\text{sh } \xi) P_2(\cos \theta), \\ W &= A_3 \text{ch}^2 \xi [1 - P_2(\cos \theta)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь и ниже

$$\begin{aligned} G_1(\text{sh } \xi) &= \text{arctg sh } \xi, \quad G_2(\text{sh } \xi) = (3 \text{sh}^2 \xi + 1) G_1(\text{sh } \xi) - 3 \text{sh } \xi, \\ G_3(\text{sh } \xi) &= G_2(\text{sh } \xi) \text{th } \xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Постоянные  $A_s$  зависят только от  $\varepsilon$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{ch } \chi = \frac{1}{\varepsilon}, \quad A_3 = \frac{q\varepsilon^2}{3\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \\ A_2 &= \frac{q}{3G_3(\text{sh } \chi)} = \frac{q}{3\Psi(\varepsilon)}, \\ \Psi(\varepsilon) &:= \left( \frac{3}{\varepsilon^2} - 2 \right) \sqrt{1-\varepsilon^2} \arcsin \varepsilon - \frac{3}{\varepsilon} (1-\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (18)$$

В [12] найдено разложение

$$\begin{aligned} \Psi(\varepsilon) &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-k)(2k)!!}{(2k+5)!!} \varepsilon^{2k+3} = \\ &= \frac{4}{15} \varepsilon^3 \left( 1 + \frac{1}{7} \varepsilon^2 - \frac{8}{231} \varepsilon^6 - \dots \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Ряд (19) сходится абсолютно и равномерно при  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Ниже понадобятся следующие свойства  $\Psi(\varepsilon)$ . Из (18), (19) немедленно следует, что  $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ . Из (19) вытекает, что  $\Psi(\varepsilon)/\varepsilon^3$  непрерывна и выпукла вверх как функция от  $\varepsilon^2$ . Поэтому  $\Psi(\varepsilon)$  положительна при  $0 < \varepsilon < 1$ .

Центробежный потенциал (а тем самым и постоянная  $A_3$ ) нам не понадобятся. Потенциал же гравитационный надо представить рядом Лапласа. Распределение масс нам неизвестно, поэтому воспользоваться формулами (6) нельзя. Но есть другой путь. Достаточно знать внешний потенциал в точке  $Q_0(0, 0, r)$  на положительной части

оси  $z$  [7]. Эллипсоидальные координаты точки  $Q_0$  суть  $\text{sh } \xi = r/(a\varepsilon)$ ,  $\theta = 0$ , тогда как долготу  $\lambda$  на оси вращения можно придать любое значение. При указанных значениях координат

$$G_1 = \text{arccctg } \zeta, \quad G_2 = (3\zeta^2 + 1) \text{arccctg } \zeta - 3\zeta, \quad P_2 = 1, \quad (20)$$

где

$$\zeta = \frac{r}{a\varepsilon}.$$

Нашей ближайшей целью является ряд Лорана по степеням  $r$  для  $V$ . Поэтому следует воспользоваться известным разложением арккотангенса

$$G_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\zeta^{2k+1}}, \quad |\zeta| > 1, \quad (21)$$

откуда элементарно находим ряд для  $G_2$ :

$$G_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k-1}k}{(2k+1)(2k+3)\zeta^{2k+1}}, \quad |\zeta| > 1. \quad (22)$$

Подставляя (21, 22) в (16), получим

$$V(Q_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [2n(A_1 - 2A_2) + 3A_1](a\varepsilon)^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)r^{2n+1}}. \quad (23)$$

Сравнивая (5) и (23), найдем коэффициенты Стокса  $I_n$ . При нечетных  $n$  они обращаются в нуль, а при четных  $n$  равны

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n, \quad J_n = \frac{n(A_1 - 2A_2) + 3A_1}{(n+1)(n+3)} \varepsilon^{n+1}. \quad (24)$$

Как и должно быть по общей теории,  $I_0 = J_0 = 1$ .

## Свойства коэффициентов Стокса уровневого эллипсоида вращения

Формула (24) показывает, что нужно рассмотреть два варианта:

1.  $A_1 - 2A_2 = 0$ , или, что то же,

$$\begin{aligned} q = q^*, \quad q^* &:= \frac{3\Psi(\varepsilon)}{2\varepsilon} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-k)(2k)!!}{(2k+5)!!} \varepsilon^{2k+2} = \\ &= \frac{2}{5} \varepsilon^2 \left( 1 + \frac{1}{7} \varepsilon^2 - \frac{8}{231} \varepsilon^6 - \dots \right). \end{aligned} \quad (25)$$



Выражение для коэффициентов Стокса упрощается:

$$J_n = \frac{3}{(n+1)(n+3)} \varepsilon^n. \quad (26)$$

Этот результат совпадает с результатом Лежандра для однородных эллипсоидов, как и должно быть, поскольку (25) тождественно соотношению (4.14) из [12] для эллипсоидов Маклорена.

Асимптотика (9) остается справедливой. Область сходимости  $r \geq a\varepsilon$  ряда Лапласа (4) совпадает с найденной выше для эллипсоидальных фигур.

2.  $A_1 - 2A_2 \neq 0$ .

В этом случае асимптотика  $J_n$  при больших  $n$  другая:

$$J_n \sim \frac{B_2}{n^\sigma} \varepsilon^n, \quad \sigma = 1, \quad B_2(\varepsilon) = (A_1 - 2A_2)\varepsilon = 1 - \frac{2q\varepsilon}{3\Psi(\varepsilon)}. \quad (27)$$

Замкнутое выражение и ряд для  $\Psi(\varepsilon)$  приведены в (18) и (19). Общий член ряда для  $\Psi^{-1}(\varepsilon)$  нам найти не удалось, но первые члены находятся без труда:

$$B_2(\varepsilon) = 1 - \frac{5q}{2\varepsilon^2} \left( 1 - \frac{1}{7} \varepsilon^2 + \frac{1}{49} \varepsilon^4 + \frac{359}{11319} \varepsilon^6 \dots \right), \quad |\varepsilon| < 1. \quad (28)$$

Из установленных в параграфе 2 свойств функции  $\Psi$  следует, что  $B_2(\varepsilon) \rightarrow -\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 1$ , а ряд (28) расходится к бесконечности при  $\varepsilon = 1$ . Поэтому вычисления лучше проводить с рядом (19).

*Замечание.* Большие значения  $|B|$  (а тем более отрицательная бесконечность) кажутся парадоксальными. Но для медленно вращающихся тел они не встречаются. Напомним, что при малых  $q$  мал и  $\varepsilon$ .

Открытая область сходимости ряда (4) та же, что и в первом случае:  $r > a\varepsilon$ . Однако в точках сферы  $r = a\varepsilon$  ряд (4) сходится абсолютно вне полюсов и лишь условно в полюсах.

Примечательно, что асимптотики (27) и (9) не совпадают. Именно, показатели степени  $\sigma$  отличаются на единицу. Таким образом, при  $A_1 - 2A_2 \neq 0$  не существует *уровневых эллипсоидов с эллипсоидальными эквиденситами*. Напомним, что мы ограничиваемся эллипсоидами вращения.

## Примеры

Рассмотрим три примера. Числовые данные возьмем из [14–16].

1. Земля. Для Земли  $\alpha = 0.00335$ ,  $\varepsilon = 0.0818$ ,  $q = 0.00345$ ,  $q^* = 0.00268$ .
2. Сатурн. Заметим, что в Солнечной системе среди больших планет, их регулярных спутников и самого Солнца наибольшим сжатием обладает Сатурн:  $\alpha = 0.0980$ ,  $\varepsilon = 0.432$ ,  $q = 0.140$ ,  $q^* = 0.0765$ .

Для обеих планет  $q^*$  значительно меньше  $q$ , что свидетельствует о быстром убывании плотности от центра к периферии.

3. Пульсар PSR B0531+21 в Крабовидной туманности:  $\omega = 188 \text{ с}^{-1}$ . При типичных для нейтронной звезды значениях  $a = 12 \text{ км}$  и массы, равной 1.4 солнечной [17], согласно (11)

$$Q := \frac{q}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = 3.3 \cdot 10^{-4}. \quad (29)$$

Если принять  $q = q^*$ , то придем к

$$q = 0.00033, \quad \varepsilon = 0.029, \quad \alpha = 0.00042.$$

При большей массе и  $q > q^*$  сжатие будет еще меньше.

Тысячу лет назад величины  $q, Q, \varepsilon, \alpha$  были иными: пульсар теряет угловую скорость, перерабатывая энергию вращения в излучение. Снабдим значения этих величин сразу после взрыва сверхновой индексом 1. Значение начального периода в 19 мс, приведенное в [18], дает

$$\omega_1 = 331 \text{ с}^{-1}, \quad Q_1 = 0.0010. \quad (30)$$

Отсюда можно сделать вывод, что значительную часть углового момента унесла выброшенная при взрыве сверхновой материя. В самом деле, пусть коллапс не сопровождается выбросом массы. Тогда по закону сохранения момента импульса

$$a_1^2 \omega_1 = a_0^2 \omega_0, \quad (31)$$

где индекс 0 отмечает значения величин непосредственно перед взрывом. Для оценки примем  $a_0, q_0$  равными значениям для Солнца. Соответствующее значение параметра  $Q$  обозначим через  $\tilde{Q}_1$ . Из (11) и (31) следует

$$\tilde{Q}_1 = \frac{a_0}{a_1} Q_0. \quad (32)$$

Даже для медленно вращающегося Солнца  $q_0 = 2.13 \cdot 10^{-5}$ , так что правая часть (32) оценивается снизу величиной 1.24, что на три порядка расходится с оценкой (30).

Отношение угловых моментов Солнца и пульсара можно оценить по формуле

$$\frac{K_{\odot}}{K_{\text{puls}}} = \sqrt{\frac{Q_0 a_0}{Q_1 a_1} \left( \frac{M_{\odot}}{M_{\text{puls}}} \right)^3} > 21.3, \quad (33)$$

где  $M_{\odot}$ ,  $M_{\text{puls}}$  — массы Солнца и пульсара.

*Замечание.* Соотношения (31) и (33) не учитывают изменения в форме и распределении масс при коллапсе. Соответствующую поправку для Солнца рассчитать несложно, структура же нейтронной звезды известна менее надежно. Простейшая из разумных оценок — постоянная плотность — дает значение поправочного коэффициента для правых частей (32) и (33), равное 0.15. Оценка, вероятно, занижена, поскольку плотность пульсара может изменяться на восемь порядков от центра к внешним слоям [17].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-02-00552.

## Библиографические ссылки

1. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. — М. ; Ижевск : РХД, 2000. — С. 208.
2. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. — Л. ; М. : ОНТИ, 1936. — С. 376.
3. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. — М. ; Л. : ГИТТЛ, 1946. — С. 320.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М. : ИЛ, 1952. — С. 476.
5. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. — М. : Физматлит, 1961. — С. 288.
6. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М. : Мир, 1973. — С. 289.
7. Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М. : Наука, 1988. — С. 272.
8. Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. — М. ; Ижевск : Изд. ИКИ, 2003. — С. 624.
9. Legendre A. M. Mémoires présentés par les savants étrangers, X. — 1785.

10. *Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш.* Коэффициенты Стокса сжатого эллипсоида вращения, эквиденситы которого подобны его поверхности // Вестн. С.-Петербург. ун-та.— Сер. 1.— 2017.— Т. 4(62), вып. 3.— С. 516—524.
11. *Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш.* Ряд Лапласа эллипсоидальных фигур вращения // Вестн. С.-Петербург. ун-та.— Сер. 1.— 2017.— Т. 4(62), вып. 4.— С. 695—703.
12. *Питъев Н. П., Титов В. Б., Холшевников К. В.* Фигуры равновесия небесных тел. — СПб. : Изд. СПбГУ, 2002. — С. 108.
13. *Грушинский Г. П.* Теория фигур Земли. — М. : Наука, 1976. — С. 512.
14. *Аллен К. У.* Астрофизические величины. — М. : Мир, 1977. — С. 279.
15. *Ravit H., Galanti E., Kaspi Y.* Saturn's fast spin determined from its gravitational field and oblateness // Nature. — 2015. — Vol. 520, iss. 7546. — P. 202—204.
16. *Manchester R. N., Hobbs G. B., Teoh A., Hobbs M.* The Australia telescope national facility pulsar catalogue // Astron. J. — 2005. — Vol. 129, iss. 4. — P. 1993—2007.
17. *Потехин А. Ю.* Физика нейтронных звезд // Успехи физ. наук. — 2010. — Т. 180, вып. 12. — С. 1279—1304.
18. *Kaspi V. M., Helfand D. J.* Constraining the birth events of neutron stars // arXiv preprint astro-ph/0201183. — 2002.